

[shadow=true]

1 §1. Ферми

§1. Ферми

Ставнопрътовите конструкции се състоят от прави прътови елементи, свързани със стави помежду си във възли, като прътовите елементи са взаимно неподвижни един спрямо друг, а натоварването представлява само съсредоточени сили, приложени във възлите. Всъщност ставнопрътовата конструкция е *механо-математичен модел* на реална конструкция от прави пръти наречена *ферма*. Прътите на фермата са съединени чрез заваряване, нитови или болтови съединения. Ставите не е задължително да са изпълнени като свързващи елементи, но ако натоварването отговаря на изискването да е съвкупност от съсредоточени сили, приложени във възлите, то тогава прътите са натоварени само с осови сили на опън или натиск. Това състояние на фермата е еквивалентно на ставнопрътова конструкция, натоварена с възлови съсредоточени сили.

1. Необходим брой на прътите

Необходимият брой пръти, за да се получи кинематично неизменяема ставнопрътова конструкция се определя от формулите:

$$\text{В равнината} \quad m = 2j - 3 \quad (1)$$

$$\text{В пространството} \quad m = 3j - 6 \quad (2)$$

където j е броят на ставите, а m е броят на прътите. Ако прътите са повече от необходимия брой, то допълнителните пръти водят до вътрешна статична неопределимост. Външната зависи само от начина на закрепване на конструкцията като цяло.

2. Методи за решаване

Методи за решаването на ставнопрътови системи:

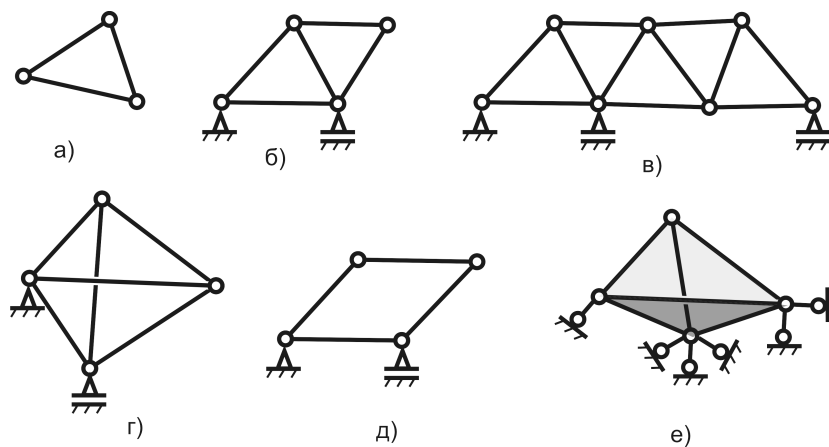
Статично определими ферми. определят се опорните реакции от условията за равновесие на статиката. *Метод на изрязване на възлите:* изрязват се последователно възли и се определят нормалните разрезни усилия на отделните пръти като се започва от възли свързващи само два пръта. *Метод на сеченията:* Правят се сечения през три пръта (Ритерови).

Статично неопределими ферми. Могат да се решават с методи като силов метод и деформационен метод. Деформационният метод по общ и двата метода могат да се обединят като матрични методи на строителната механика.

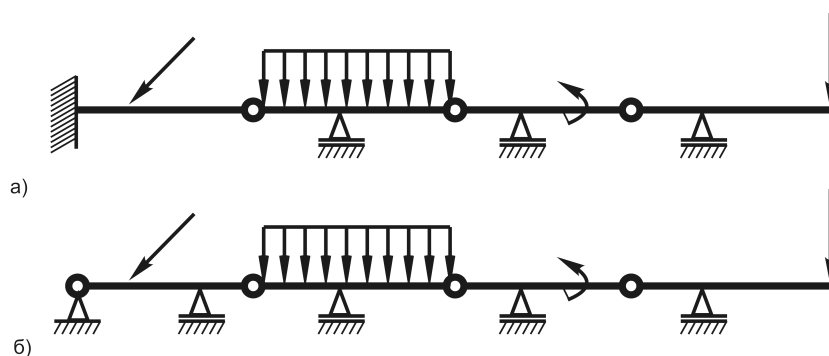
2 §2. Герберови греди

§2. Герберови греди

Това са гредови елементи свързани със стави и подпярни на много опори. Те имат вида на показаните на фиг. 2а и б греди.



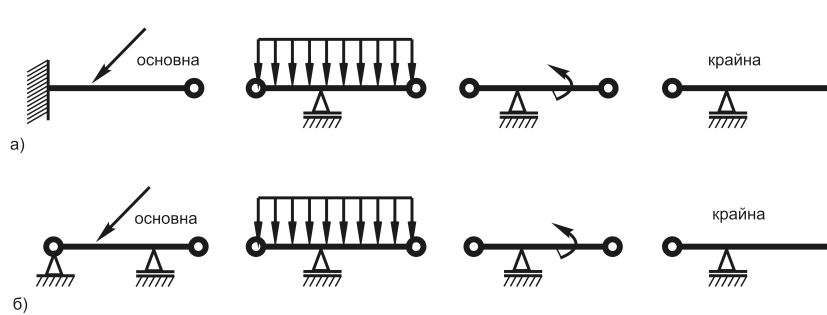
Фигура 1: Различни прътови системи: а) елементарна равнинна клетка, б) статично определима равнинна ферма, в) външно статично неопределима равнинна ферма, г) вътрешно статично неопределима равнинна ферма, д) равнинен четиризвенеи механизъм, е) пространствена елементарна клетка на статично определима ферма.



Фигура 2: Примери на Герберови греди

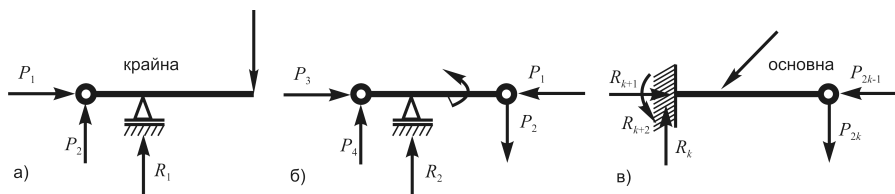
Тези греди трябва да образуват статично определима система, затова броя на елементите m е винаги с един по-голям от броя на свързващите стави j , т.е. $m = j + 1$. Закрепването е такова, че ако отделим всички гредови елементи като ги разгложим от свързващите стави, то винаги има един основен елемент, който е кинематично неизменяем, а останалите са подредени всеки с една плъзгаща се става, като последният елемент наричаме краен.

Решението на задачи може да стане с условията за равновесия на статиката. За целта гредата се разчленява и се започва с крайния гредови елемент (фиг. 4а). След определяне на всички опорни реакции, включително реакциите в свързващия шарнир P_1 и P_2 , може да се определят разрезни



Фигура 3: Разчленяване на Герберови греди

усилия като основно ни интересува огъващия момент M . След това се пристъпва към следващия гредови елемент (фиг. 4б). Така последователно се определят опорни реакции и разрезни усилия докато се достигне до основния елемент (фиг. 4в).

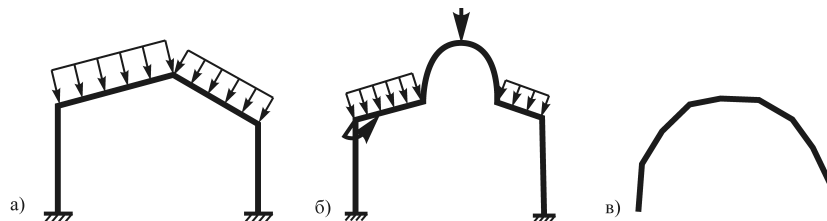


Фигура 4: Последователност при решаването на Герберова греда.

3 §3.Рамки

§3.Рамки

Равнинните рамки са прътови конструкции като осите на прътите образуват начупени прави (фиг. 5а) или криви линии (фиг. 5б), лежащи в една равнина, в която лежи и натоварването. Ние ще се ограничим в разглеждането само на пръти с прави оси като елементи на рамките, а криволинейните пръти — арки, могат да се представят като система от прави пръти, апроксимиращи формата им при дискретизацията (фиг. 5в).



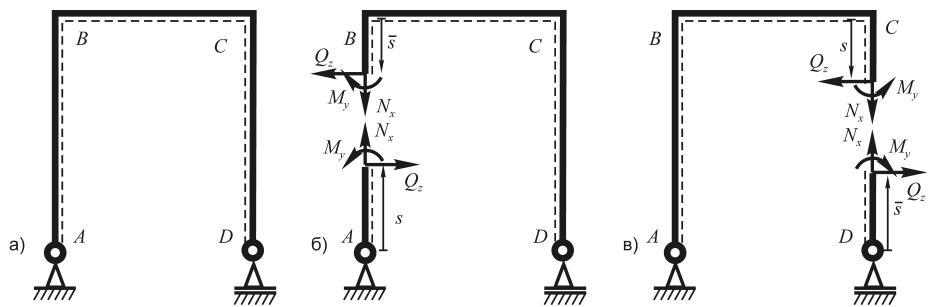
Фигура 5: Равнинни рамки

В статично определените рамки опорните реакции и разрезните усилия могат да се определят с условията за равновесие на статиката. Постъпва се както при всички статично определени задачи.

- Започва се с определяне на опорните реакции чрез прилагане на условията за равновесие на цялата система.
- След това по метода на сечението мислено разделяме рамката на две със сечения в различни участъци
- Определяме проявилите се разрезни усилия от условията за статично равновесие на една от двете части, на която сме разделили конструкцията.

Поради променящата се ориентация на гредовите елементи на рамката е целесъобразно въвеждането на гъвкава координатна система.

- Приемаме криволинейна абсциса s или \bar{s} , ако нараства в обратна посока, за определяне на мястото на разрязване.
- Определяме подходяща реперна точка.
- Въвеждаме координатна система: x — по оста на гредовия елемент, y — към нас, z — да образува дясно ориентирана координатна система с останалите две оси.
- Условната линия замества оста y при определяне на положителния огъващ момент.



Фигура 6: Използване на криволинейна абсциса при равнинна рамка.

- Три условия за равновесие в равнината напълно определят трите неизвестни разрезни усилия.
- Обикаля се в една посока по кривите контури на рамката.

- За гредови елементи с една и съща ориентация условната линия е от една и съща страна и това е страната с положителната част на оста z .
- Поглеждайки срещу z мястото на разрязване, можем да определим коя част е лява и коя е дясна.
- За лява част винаги имаме криволинейна абсциса s и положителни разрезни усилия по посока на осите, а за дясна част имаме криволинейна абсциса \bar{s} и положителни разрезни усилия насочени в обратна посока на осите x , y и z .

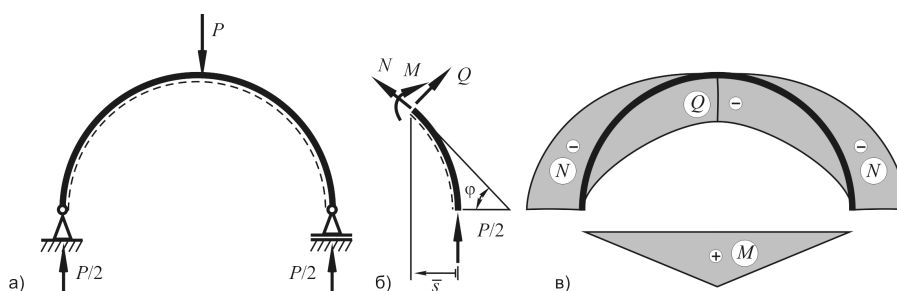
4 §4. Арки и въжета

§4. Арки и въжета

Арки

Арките са криволинейни пръти (пръти с криволинейна ос). За тях е характерно това, че поради кривината на оста им, всички товари се проектират по оста на пръта, като предизвикват опън-натиск, и напречно на пръта, като предизвикват огъване. Така арките съчетават тези две натоварвания и ако могат да трансферират по-опасното огъване в по-безопасният опън-натиск и особено натиск за крехките материали, то те стават много полезни. Тези свойства на арките са открити исторически много отдавна и са били широко използвани в сградостроенето и мостостроенето.

Двуставната арка, като показаната на фиг. 7, е една от най-простите статично определими арки. Такава арка не само е решима с условията на равновесие на статиката, но и не се отличава съществено от права гредна на две опори. На фиг. 7а е дадена кръгова арка, натоварена с централна сила P . Лесно се вижда, че опорните реакции са само вертикални сили равни на половината външно натоварване от условията за равновесие на цялата арка.



Фигура 7: Двуставна кръгова арка, натоварена с централна сила.

От условията за равновесие за част от арката, дадена на фиг. 7б, може да се определи огъващият момент M . Той се изразява чрез линейната абсциса \bar{s} като линейна функция

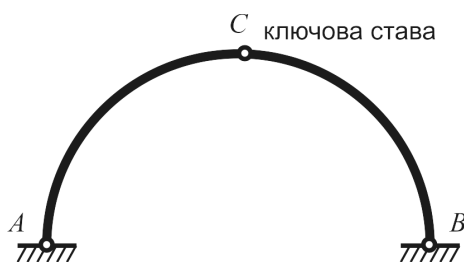
$$M = \frac{P}{2}\bar{s}$$

Проектирайки върху допирателната към мястото на разрязване и перпендикулярно на допирателната, могат да се определят и разрезните усилия N и Q :

$$N = -\frac{P}{2} \sin \varphi, \quad Q = -\frac{P}{2} \cos \varphi,$$

като функции на ъгъла φ , на който е наклонена допирателната и който се изменя от 90 до 0 градуса.

Огъващият момент е същият като при права греда, а той е определящ за якостта. Получава се обаче аксиално натоварване, което за дадения пример е натиск при опорите, който преминава в срязващо усилие с отдалечаване на опорите. Диаграмите на разрезните усилия са дадени на фиг. 7в.



Фигура 8: Троставна арка

Троставната арка, дадена на фиг. 8, също е статично определима арка, която обаче е съставна.

Врязаната става C добавя една степен на свобода към закрепената чрез ставите A и B с една допълнителна връзка арка. Така арката е статично определима, т.е. тя има точно необходимия брой връзки за да е кинематично неизменяема. Ставата C се нарича ключова. При реализирането на такава арка чрез зидария, ключовата става се реализира с ключов камък.

Нека да определим опорните реакции и разрезните усилия при такава кръгова троставна арка, натоварена с една вертикална централна сила. Арката е дадена на фиг. 9а и е полукръг от окръжност с радиус R . От симетрията, а и от моментовите условия за равновесие лесно можем да определим вертикалните опорни реакции:

$$\sum M_A = 0 \quad : \quad V_B = \frac{P}{2} \quad (3)$$

$$\sum M_B = 0 \quad : \quad V_A = \frac{P}{2} \quad (4)$$

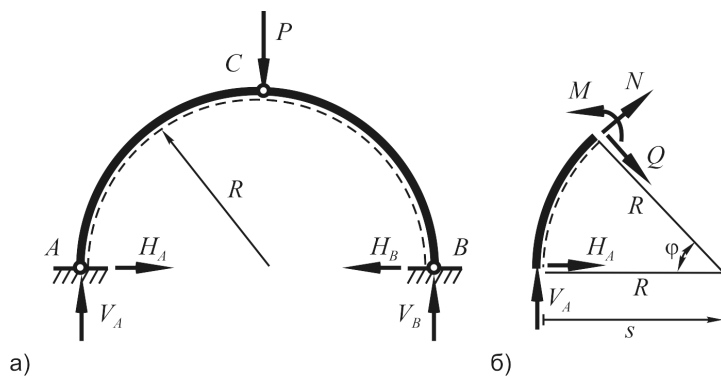
Ако направим моментови условия за равновесие около точка C за всяка половина на арката, то получаваме

$$H_A R = V_A R \quad \text{и} \quad H_B R = V_B R$$

От тук следва, че и хоризонталните реакции са:

$$H_A = V_A = \frac{P}{2} \quad (5)$$

$$H_B = V_B = \frac{P}{2} \quad (6)$$



Фигура 9: Триставна арка натоварена с централна вертикална сила.

Да определим разрезните усилия за кръгова арка. Моментово условие за равновесие около мястото на разрязване на арката от фиг. 9б дава огъващият момент:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{P}{2}R(1 - \cos \varphi) - \frac{P}{2}R \sin \varphi = \\
 &= \frac{P}{2}R(1 - \sin \varphi - \cos \varphi)
 \end{aligned} \tag{7}$$

От условия за равновесие на силите като ги проектираме по хоризонтала, а след това по вертикала се получават следните две уравнения:

$$N \cos \varphi - Q \sin \varphi = -\frac{P}{2} \tag{8}$$

$$N \sin \varphi + Q \cos \varphi = -\frac{P}{2} \tag{9}$$

Тези уравнения можем да решим съвместно като умножим уравнение (8) по $\cos \varphi$, а уравнение (9) по $\sin \varphi$ и след събирането им се елиминира Q и можем да определим N :

$$N = -\frac{P}{2}(\sin \varphi + \cos \varphi) \tag{10}$$

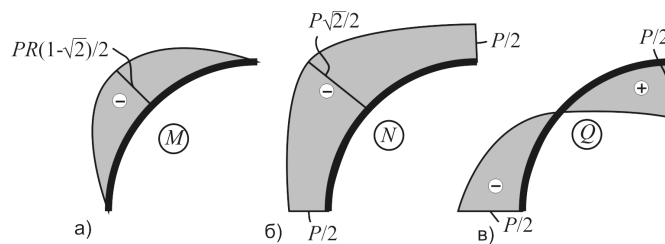
По подобен начин можем да елиминираме разрезното усилие N като умножим уравнение (8) по $\sin \varphi$, а уравнение (9) по $\cos \varphi$ и след събирането получаваме Q :

$$Q = -\frac{P}{2}(\sin \varphi - \cos \varphi) \tag{11}$$

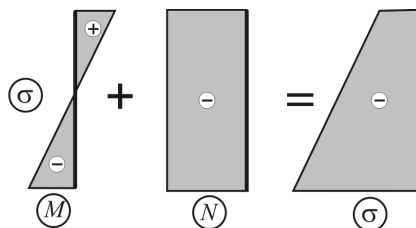
Диаграмите на разрезните усилия за диапазона на изменение на ъгъла $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ са дадени на фиг. 10.

Основни изводи за разрезните усилия на триставна рамка:

- Арката е основно натоварена на натиск.
- В арката се получава огъващ момент, който е много по-малък в сравнение с правите греди при подобно натоварване.



Фигура 10: Диаграми на разрезните усилия в триставна арка под действие на централна напречна сила.



Фигура 11: Диаграми на нормалните напрежения при суперпонирането им от огъване и от натиск.

- В опорите има стремеж за раздалечаването им.

Огъващият момент се получава с максимална стойност в мястото на максимален натиск и лесно може да се направи така, че опънвите напрежения от огъване да се компенсират от натисковите нормални напрежения и да имаме само натискова зона в напречните сечения, както е показано на диаграмите на фиг. 11.

Това дава възможност арките да се използват широко в строителни конструкции, където се използват крехки материали, имащи ниска якост на опън. Даже когато имаме зидария тя е почти нулева.

Стремежа за раздалечаване на опорите може да създаде проблеми при някои видове конструкции, при които опорите не могат да се конструират така, че да поемат хоризонтални реакции. Тогава арковата конструкция може да се изгради с обтяжка като показаната на фиг. 12 триставна рамка с обтяжка, която е еквивалентна на триставната рамка с неподвижни опори.

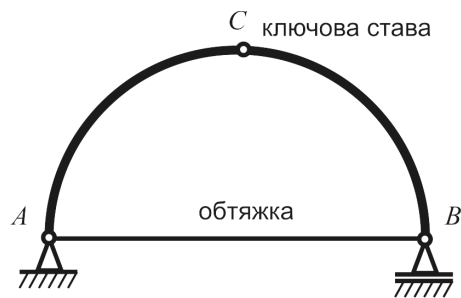
Статично определените арки могат да са с различни кривини - елиптични, параболични, и др., а не само кръгли. Те могат да са даже и с начупени прави оси, като показаните на фиг. 13.

Въжета

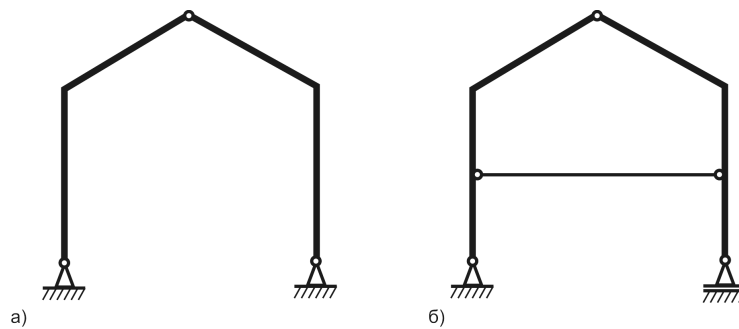
Въже

Въжето е прът, който е много гъвкав — няма огъвна коравина, на натиск не може да носи товар и е абсолютно неразтегливо.

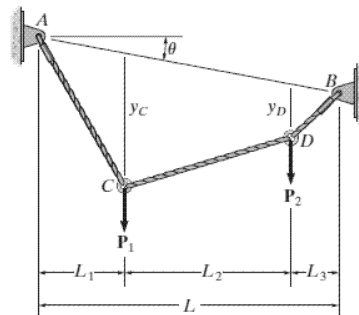
Въжените конструкции са подложени на два вида натоварване: *свредоточени сили равномерно разпределен товар*. Теглото на въжетата обикно-



Фигура 12: Тривставна арка с обтяжка.



Фигура 13: Необли арки.



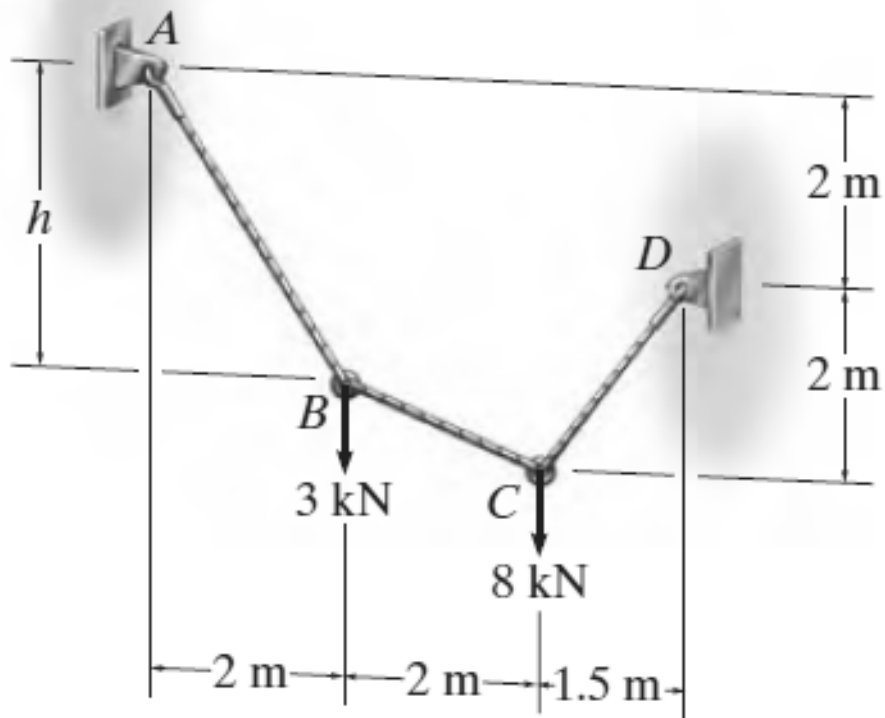
Фигура 14: Пример за окачена конструкция

венно се пренебрегва и имаме първия случай, но на много големи разстояния са необходими големи по диаметър въжета със значително собствено тегло. Да разгледаме какво става с въжена конструкция при действието само на съсредоточени сили.

4×2 условия за равн. на възли = 8 уравнения

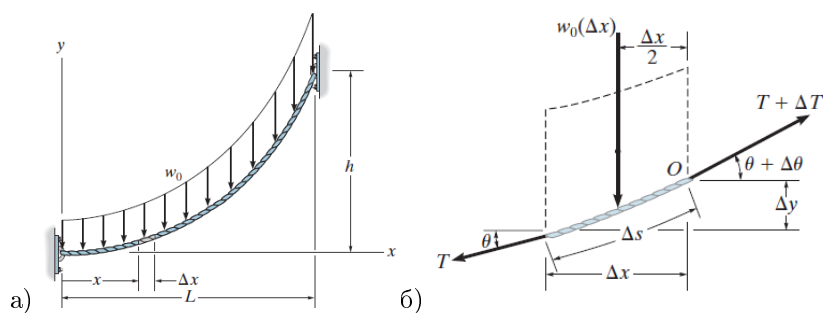
4 реакции + 3 разрезни усилия = 7 неизвестни + 2 геометрични неизвестни – провисвания = 9 неизвестни.

Трябва да знаем или едно от провисванията или общата дължина на въжето (допълнително геометрично условие).



Фигура 15: Статично определима конструкция

Въже под равномерно разпределен товар



Фигура 16: Въже под равномерно разпределен товар

$$\sum F_x = 0 : -T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$\sum F_y = 0 : -T \sin \theta - w_0(\Delta x) + (T + \Delta T) \sin(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$\sum M_O = 0 : w_0(\Delta x)(\Delta x/2) - T \cos \theta \Delta y + T \sin \theta \Delta x = 0$$

Разделяме на Δx и разглеждаме границите при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta \theta \rightarrow 0$ и $\Delta T \rightarrow 0$:

$$\frac{d(T \cos \theta)}{dx} = 0 ; \quad \frac{d(T \sin \theta)}{dx} = w_0 ; \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta .$$

След интегриране се получава:

$$T \cos \theta = F_H = \text{const} ; \quad T \sin \theta = w_0 x ; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0 x}{F_H}$$

При повторно интегриране на последното уравнение с начални условия $x = 0$, $y = 0$, получаваме уравнение

$$y = \frac{w_0}{2F_H} x^2$$

което е уравнение на квадратна парабола.

При $x = L$, $y = h$ се получава за хоризонталната реакция

$$F_H = \frac{w_0 L^2}{2h}$$

което ако заместим в уравнението на параболата получаваме

$$y = \frac{h}{L^2} x^2$$

Максималната стойност за ъгъла θ_{\max} е при $x = L$, където се получава и най-голямото разрезно усилие:

$$T_{\max} = \sqrt{F_H^2 + (w_0 L)^2} = w_0 L \sqrt{1 + (L/2h)^2}$$

Съдържание

Съдържание

| | | |
|----------|----------------------------|----------|
| 1 | §1. Ферми | 1 |
| 2 | §2. Герберови греди | 1 |
| 3 | §3. Рамки | 3 |
| 4 | §4. Арки и въжета | 5 |