Глава 3. Енергиен метод за определяне на премествания

доц. д-р инж. Ивелин Иванов
e-mail: ivivanov@uni-ruse.bg
http://ivivanov.orgfree.com

каб. 1.432, кат. Техническа механика,
Русенски университет,
гр. Русе

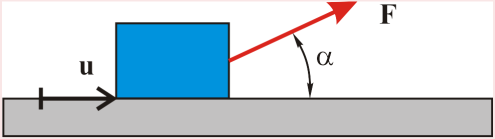
лекции 2016 г.

Гл.3.Енергийни методи за определяне на премествания
§1.Потенциална енергия на деформациите

Работа на сила

Работа на сила W е произведението на силата по проекцията на преместването върху директрисата на силата или ако приемем, че силата F е векторна величина и преместването u е векторна величина, то

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u} = Fu\cos\alpha$$



Дефиницията за работа предполага, че силата и преместването са независими величини. Ако двете величини се изменят произволно, то трябва да определим елементарната работа и интеграл от нея ще ни даде работата:

$$\mathrm{d}W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{u}\ ; \quad W = \int \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{u}\ ;$$

Ако измерваме преместването по директрисата на силата, то работата на силата е:

$$W = \int_0^u F \mathrm{d}u$$

Работата на сила е скалар, т.е. едно число.

Енергия

Енергията е скалар, т.е. едно число, което показва работата, която е възможно едно тяло да извърши след като върху него са действали външни сили и са го довели до определено състояние.

Например кинетичната енергия на едно тяло с маса m и скорост V е равна на

$$E_k = \frac{mV^2}{2}$$

защото на толкова е равна работата на една постоянна сила $F = ma$ за спирането на тялото:

$$W = Fu = ma\left(Vt - \frac{1}{2}at^2\right) = m\frac{V}{t}\left(Vt - \frac{1}{2}Vt\right)$$

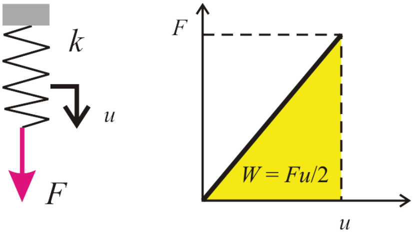
$$W = mV\left(V - \frac{1}{2}V\right) = \frac{mV^2}{2}$$

Работата на сила за деформирането на пружина е равна на

$$W = \frac{1}{2}Fu = \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2k}F^2$$

защото силата се изменя по линеен закон в зависимост от преместването:

$$F = ku$$



Фигура 1: Работа на сила за деформиране на пружина

Енергията, която се натрупва в деформираната пружина е равна на работата на външните сили за деформирането й. Следователно:

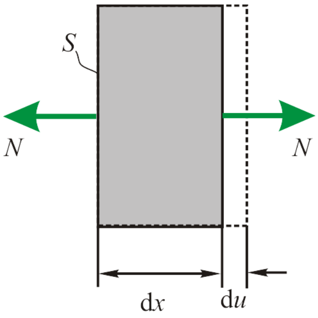
$$U_e = W = \frac{1}{2}Fu$$

А каква е енергията натрупана в спирална пружина – такава като на редица стари часовници. Тогава трябва да заместим силата F с момент на двоица сили M, а преместването u със завъртане θ, измерено в радиани.

$$U_e = \frac{1}{2}M\theta$$

Въобще можем да говорим за *обобщена сила* и *обобщено преместване*. А каква е енергията натрупана в опънат прът?

Енергия на еластичните деформации или потенциална енергия на деформациите



Фигура 2: Опън

ОПЪН

За елементарна дължина от пръта:

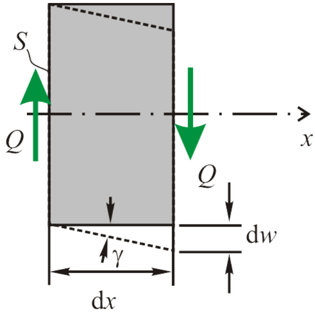
$$\mathrm{d}U_N = \frac{1}{2}N\mathrm{d}u \ , \ \mathrm{d}u = \frac{N}{ES}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}U_N = \frac{N^2}{2ES}\mathrm{d}x$$

За цялата дължина на пръта

$$\boxed{U_N = \int_0^L \frac{N^2}{2ES}\mathrm{d}x}$$

Тази енергия е определяща при ферми.



Фигура 3: Срязване

СРЯЗВАНЕ

За елементарна дължина от пръта:

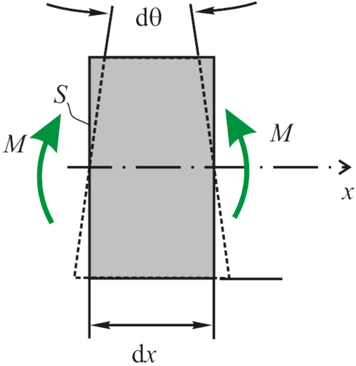
$$\mathrm{d}U_Q = \frac{1}{2}Q\mathrm{d}w\ ,\ \mathrm{d}w = \gamma\mathrm{d}x = \frac{Q}{GS}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}U_Q = \frac{Q^2}{2GS}\mathrm{d}x$$

За цялата дължина на пръта при огъване

$$\boxed{U_Q = \int_0^L \frac{Q^2}{2kGS}\mathrm{d}x}$$

Тази енергия е несъществена при рамки.



Фигура 4: Огъване

ОГЪВАНЕ

За елементарна дължина от пръта:

$$\mathrm{d}U_M = \frac{1}{2} M \mathrm{d}\theta \;, \;\; \mathrm{d}\theta = \frac{M}{EI}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}U_M = \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

За цялата дължина на пръта при огъване

$$\boxed{U_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x}$$

Това е най-съществената част от енергията при рамки.

§2.Принцип на виртуалната работа и енергийни теореми

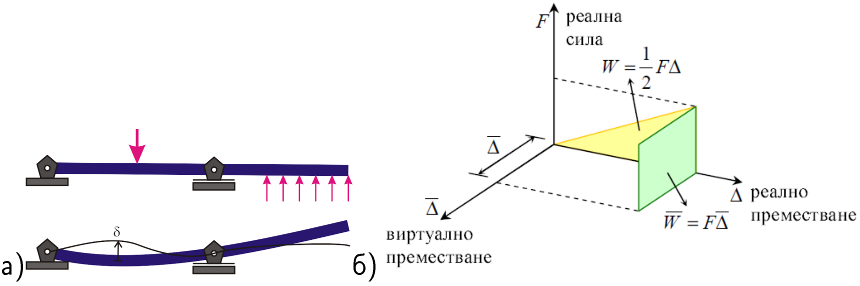
Принцип на виртуалната работа на Бернули (Bernoulli) 1717

Ако една система се намира в равновесие под действието на дадени външни товари, то сумата от работата на всички сили (външни и вътрешни) по произволно зададени безкрайно малки възможни (виртуални) премествания е нула. Обратното, че ако работата е нула, то системата е в равновесие, също е вярно.

Виртуални премествания

Това са много малки премествания, които са възможни за системата съгласно наложените й връзки (опори).

На фиг. 5а е даден пример за виртуални премествания около равновестното състояние на греда.



Фигура 5: а) Виртуални премествания б) Виртуална работа

Принципът на виртуалната работа (фиг. 5б) днес е трансформиран в принцип за стационарност на пълната потенциална енергия.

През XIX-ти век се появяват редица теореми отнасящи се до работата на сили и енергията, в еластичните тела.

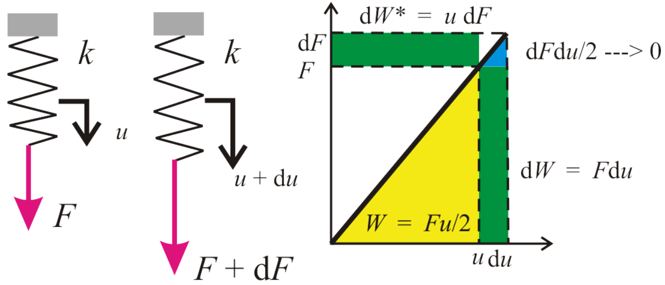
Теорема на Кастилиано (Castigliano)

Преместването на приложната точка на силата по посока на силата в една натоварена система от твърди тела е равна на частната производна на вътрешната енергия на системата от тела по силата:

$$u_F = \frac{\partial U}{\partial F}$$

Доказателство

Нека да разгледаме една пружина натоварена със сила F:



Фигура 6: Пружина в равновесие

Ако дадем малко нарастване на силата и преместването, то баланса на енергията и работата ще бъде:

$$U + \frac{\partial U}{\partial F}\mathrm{d}F = W + \mathrm{d}W \ , \ U = W$$

$$\frac{\partial U}{\partial F}\mathrm{d}F = \mathrm{d}W = F\mathrm{d}u$$

Но нарастването на работата е равно на нарастването на допълнителната работа

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W^{*} = u\mathrm{d}F$$

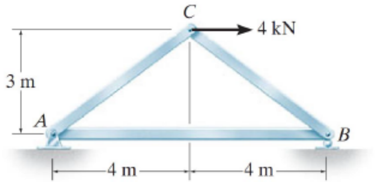
Окончателно

$$u = \frac{\partial U}{\partial F}$$

Приложението на теоремата на Кастилиано се състои в изразяване на разрезните усилия като функция на натоварването и по-точно на обобщената сила P. Ако няма обобщена сила P, съотвестваща на обобщеното преместване δ, което търсим, можем да си я измислим. Намираме производните за всички прътови елементи на конструкцията:

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{L_i} \frac{\partial N}{\partial P} \frac{N}{ES} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{L_i} \frac{\partial Q}{\partial P} \frac{Q}{kGS} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{L_i} \frac{\partial M}{\partial P} \frac{M}{EI} \mathrm{d}x$$

След получаване на изразите за производните заместваме числено товара, а ако е измислен го заместваме с нула.



Пример: Теорема на Кастилиано

Определете хоризонталното и вертикално преместване на т. C от показаната ферма, ако напречните сечения на прътите са 400 mm^2, а модулът на еластичност $E = 200$ GPa.

Решение

Теорема на Бети (Betti) за взаимност на работите

Работата на външните сили довели до състояние i по преместванията, довели до състояние j, е равна на работата на силите довели до състояние j по преместванията довели до състояние i:

$$\sum F_i \delta_{ij} = \sum F_j \delta_{ji}$$

Теорема на Максуел (Maxwell) за взаимност на преместванията

Преместването на точка i (по направление на силата F_i) вследствие на действието на силата $F_j = 1$ е равно на преместването на точка j (по направление на силата F_j) вследствие на действието на силата $F_i = 1$:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

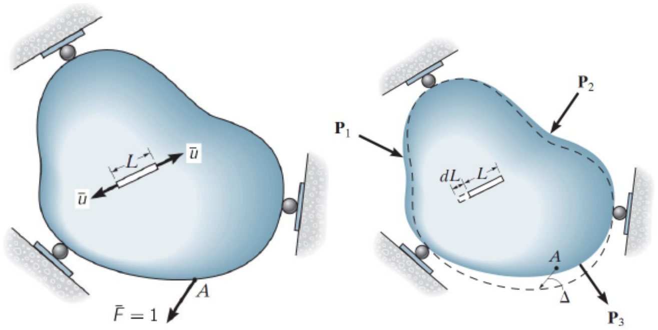
§3.Общ метод за определяне на преместванията

Нарича се още "Метод на виртуалните сили"или по-правилно "Метод на единичната сила".

Общ метод за определяне на преместванията

1. Натоварваме с единична сила $\overline{F} = 1$ конструкцията и определяме разрезните усили $\overline{N}$, $\overline{Q}$, $\overline{M}$ от това натоварване;
2. Натоварваме с действителното натоварване $\sum F_i$ конструкцията и определяме разрезните усили N, Q, M от това натоварване;
3. Изчисляваме $\delta = \sum \int_0^L \overline{N} \mathrm{d}u + \sum \int_0^L \overline{Q} \mathrm{d}w + \sum \int_0^L \overline{M} \mathrm{d}\theta$;

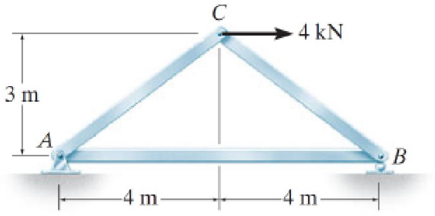
$$\boxed{\delta = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{L_i} \frac{\overline{N} N}{ES} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{L_i} \frac{\overline{Q} Q}{kGS} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{L_i} \frac{\overline{M} M}{EI} \mathrm{d}x}$$



Фигура 7: Метод на единичната сила

Всъщност методът е директно следствие от теоремата на Бети като се приложи единичната сила от теоремата на Максуел.

$$\overline{F}.\Delta = \sum \overline{u}\Delta L \ , \quad \overline{W} = \overline{U} \ , \quad \overline{F} = 1 \ , \quad \Delta = \sum \overline{u}\Delta L$$



Пример: Общ метод за определяне на преместванията

Определете хоризонталното и вертикално преместване на т. C от показаната ферма, ако напречните сечения на прътите са 400 mm^2, а модулът на еластичност $E = 200$ GPa.

Решение

Интегралите от Общия метод за определяне на премествания

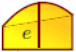
$$\int_0^{L_i} \frac{\overline{N}N}{ES}\mathrm{d}x \ , \quad \int_0^{L_i} \frac{\overline{Q}Q}{kGS}\mathrm{d}x \ , \quad \int_0^{L_i} \frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}x$$

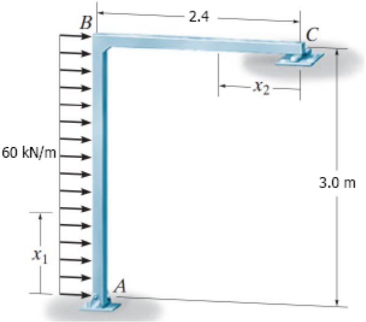
наричаме интеграли на Максуел-Мор. Тези интеграли съдържат произведение от две функции на x:

$$\int_0^{L} f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x$$

които са полиноми и то не повече от втора степен. Тези интеграли решаваме като използваме таблици, в които има готови решения за диаграмите на функциите.

Таблица 1: Таблица за умножаване на диаграми

$f_2(x)$ \ $f_1(x)$	a  a, ℓ	a  ℓ	 a, ℓ	a  b, ℓ
c  c, ℓ	$ac\ell$	$\frac{1}{2}ac\ell$	$\frac{1}{2}ac\ell$	$\frac{1}{2}c(a+b)\ell$
c  ℓ	$\frac{1}{2}ac\ell$	$\frac{1}{3}ac\ell$	$\frac{1}{6}ac\ell$	$\frac{1}{6}c(2a+b)\ell$
 c, ℓ	$\frac{1}{2}ac\ell$	$\frac{1}{6}ac\ell$	$\frac{1}{3}ac\ell$	$\frac{1}{6}c(a+2b)\ell$
c  d, ℓ	$\frac{1}{2}a(c+d)\ell$	$\frac{1}{6}a(2c+d)\ell$	$\frac{1}{6}a(c+2d)\ell$	$\frac{1}{6}(ac+(a+b)(c+d)+bd)\ell$
c  d, e, $\ell/2$	$\frac{1}{6}a(c+4e+d)\ell$	$\frac{1}{6}a(c+2e)\ell$	$\frac{1}{6}a(d+2e)\ell$	$\frac{1}{6}(ac+2e(a+b)+bd)\ell$



Пример: Общ метод за определяне на преместванията

Определете завъртането на т. C от показаната рамка, ако напречните сечения на прътите имат огъвна коравина $EI = 300$ kN.m^2.

Решение

Премествания от преместването на опората

Ако по общия метод за определяне на преместванията се определят премествания в една или друга точка от конструкцията, но няма натоварване, а причината за преместванията е поддаване на опората, то тогава в баланса на допълнителната виртуална работа се получава:

$$\overline{W} = \overline{F}.\delta + \overline{R}.d = \overline{U} = 0\ , \quad \overline{F} = 1$$

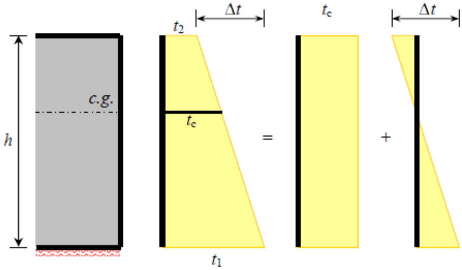
където $\overline{R}$ е реакцията в поддалата опора в направление на поддаването d. Окончателно

Преместване от поддаване на опорите

$$\boxed{\delta = -\overline{R}.d}$$

Премествания от температурни промени

При температурни промени прътите се удължават с увеличение на температурата и огъват, ако тя е неравномерно разпределена по височината на сечението.



Фигура 8: Удължаване пропорционално на температурата

Удължението на пръта по неговата ос и завъртането на сеченията от неравномерната температура са:

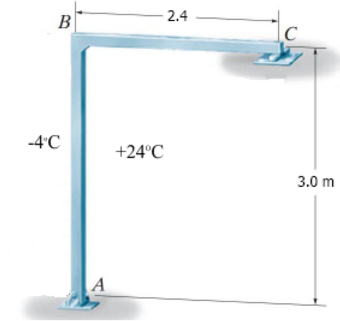
$$\mathrm{d}u = \alpha t_C \mathrm{d}x \; ; \quad \mathrm{d}\theta = \alpha \frac{\Delta t}{h} \mathrm{d}x$$

където α е коефициент на линейно температурно разширение на материала. Тогава по тези премествания ще имат работа "виртуалните"нормални разрезни усилия $\overline{N}$ и "виртуалните"огъващи моменти $\overline{M}$:

Преместване от температурни промени

$$\boxed{\delta = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{L_i} \overline{N} \alpha t_C \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{L_i} \overline{M} \alpha \frac{\Delta t}{h} \mathrm{d}x}$$

При комбинирането на натоварване от външни сили, поддаване на опорите и температурни промени преместванията се сумират по принципа на суперпозицията.



Пример: Общ метод за определяне на преместванията

Определете завъртането на т. C от показаната рамка в резултат на поддаване на опората A с 2 cm надолу и 1 cm наляво, както и в резултат на температурната разлика между вътрешното и външно пространство както е посочено на схемата в сравнение с равномерна температура от 20° C.

Напречните сечения на прътите са правоъгълни с височина $h = 7$ cm и ширина $b = 5$ cm, направени са от стомана с модул на еластичност $E = 210$ GPa и коефициент на линейно температурно разширение $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}.

Съдържание I