

Глава 2. Разрезни усилия в статично определими конструкции

доц. д-р инж. Ивелин Иванов
e-mail: ivivanov@uni-ruse.bg
<http://ivivanov.orgfree.com>

каб. 1.432, кат. Техническа механика,
Русенски университет,
гр. Русе

лекции 2016 г.

§1. Ферми

Ставнопрътовите конструкции се състоят от прави прътови елементи, свързани със стави помежду си във възли, като прътовите елементи са взаимно неподвижни един спрямо друг, а натоварването представлява само съсредоточени сили, приложени във възлите. Всъщност ставнопрътовата конструкция е *механо-математичен модел* на реална конструкция от прави пръти наречена *ферма*. Прътите на фермата са съединени чрез заваряване, нитови или болтови съединения. Ставите не е задължително да са изпълнени като свързващи елементи, но ако натоварването отговаря на изискването да е съвкупност от съсредоточени сили, приложени във възлите, то тогава прътите са натоварени само с осови сили на опън или натиск. Това състояние на фермата е еквивалентно на ставнопрътова конструкция, натоварена с

2/32 възлови съсредоточени сили.

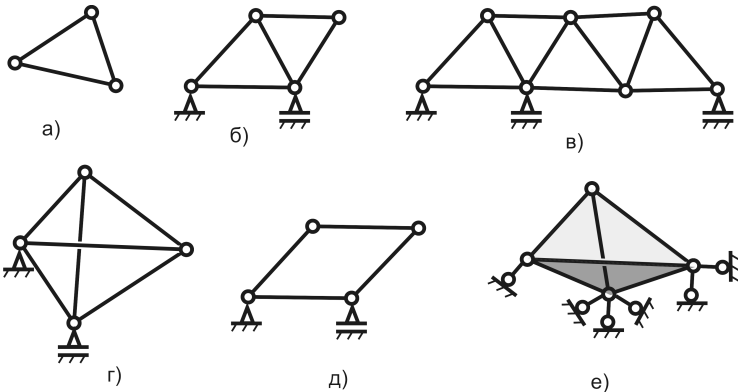
1. Необходим брой на прътите

Необходимият брой пръти, за да се получи кинематично неизменяема ставнопрътна конструкция се определя от формулите:

$$\text{В равнината} \quad \boxed{m = 2j - 3} \quad (1)$$

$$\text{В пространството} \quad \boxed{m = 3j - 6} \quad (2)$$

където j е броят на ставите, а m е броят на прътите. Ако прътите са повече от необходимия брой, то допълнителните пръти водят до вътрешна статична неопределимост. Външната зависи само от начина на закрепване на конструкцията като цяло.



Фигура 1: Различни прътови системи: а) елементарна равнинна клетка, б) статично определима равнинна ферма, в) външно статично неопределима равнинна ферма, г) вътрешно статично неопределима равнинна ферма, д) равнинен четиризъвен механизъм, е) пространствена елементарна клетка на статично 4/32определима ферма.

2. Методи за решаване

Методи за решаването на ставнопрътови системи:

Статично определими ферми. определят се опорните реакции от условията за равновесие на статиката. **Метод на изрязване**

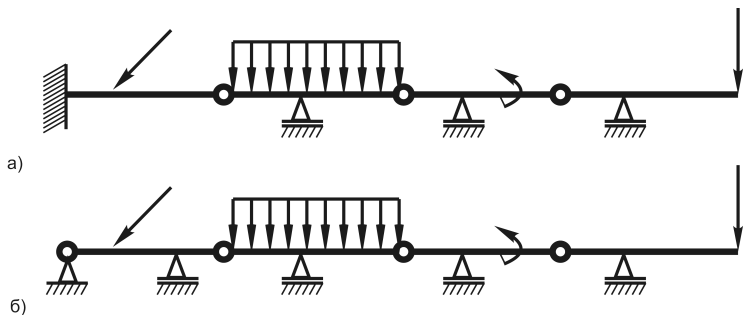
на възлите: изрязват се последователно възли и се определят нормалните разрезни усилия на отделните пръти като се започва от възли свързващи само два пръта. **Метод на**

сеченията: Правят се сечения през три пръта (Ритерови).

Статично неопределими ферми. Могат да се решават с методи като силов метод и деформационен метод. Деформационният метод по общ и двата метода могат да се обединят като матрични методи на строителната механика.

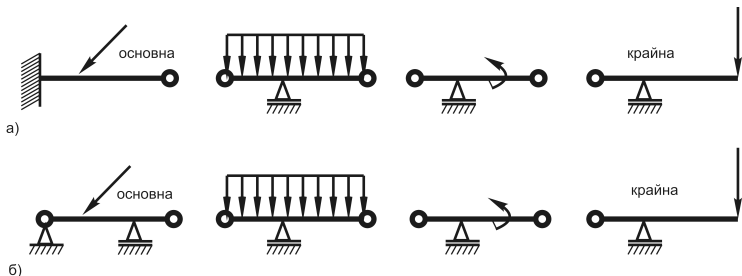
§2. Герберови греди

Това са гредови елементи свързани със стави и подпрянни на много опори. Те имат вида на показаните на фиг. 2а и б греди.



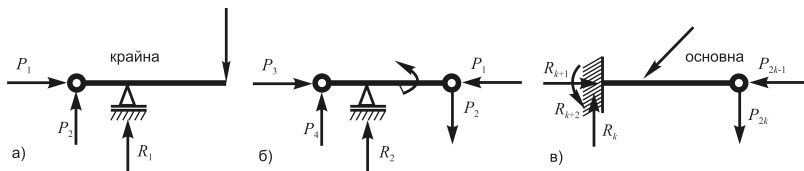
Фигура 2: Примери на Герберови греди

Тези греди трябва да образуват статично определима система, затова броя на елементите m е винаги с един по-голям от броя на свързващите стави j , т.е. $m = j + 1$. Закрепването е такова, че ако отделим всички гредови елементи като ги разглобим от свързващите стави, то винаги има един основен елемент, който е кинематично неизменяем, а останалите са подредени всеки с една плъзгаща се става, като последният елемент наричаме краен.



Фигура 3: Разчленяване на Герберови греди

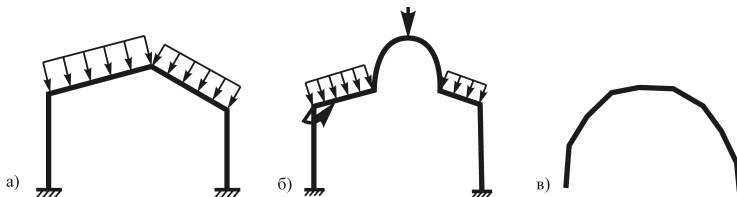
Решението на задачи може да стане с условията за равновесия на статиката. За целта гредата се разчленява и се започва с крайния гредови елемент (фиг. 4а). След определяне на всички опорни реакции, включително реакциите в свързващия шарнир P_1 и P_2 , може да се определят разрезни усилия като основно ни интересува огъващия момент M . След това се пристъпва към следващия гредови елемент (фиг. 4б). Така последователно се определят опорни реакции и разрезни усилия докато се достигне до основния елемент (фиг. 4в).



Фигура 4: Последователност при решаването на Герберова греда.

§3.Рамки

Равнинните рамки са прътови конструкции като осите на прътите образуват начупени прави (фиг. 5а) или криви линии (фиг. 5б), лежащи в една равнина, в която лежи и натоварването. Ние ще се ограничим в разглеждането само на пръти с прави оси като елементи на рамките, а криволинейните пръти — арки, могат да се представят като система от прави пръти, апроксимиращи формата им при дискретизацията (фиг. 5в).

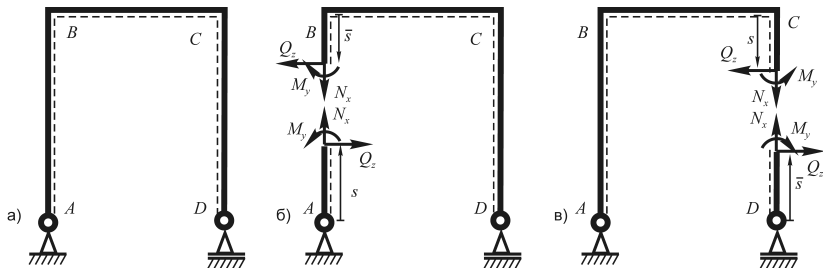


В статично определимите рамки опорните реакции и разрезните усилия могат да се определят с условията за равновесие на статиката. Постъпва се както при всички статично определими задачи.

- Започва се с определяне на опорните реакции чрез прилагане на условията за равновесие на цялата система.
- След това по метода на сечението мислено разделяме рамката на две със сечения в различни участъци
- Определяме проявилите се разрезни усилия от условията за статично равновесие на една от двете части, на която сме разделили конструкцията.

Поради променящата се ориентация на гредовите елементи на рамката е целесъобразно въвеждането на гъвкава координатна система.

- Приемаме криволинейна абсциса s или \bar{s} , ако нараства в обратна посока, за определяне на мястото на разрязване.
- Определяме подходяща реперна точка.
- Въвеждаме координатна система: x — по оста на гредовия елемент, y — към нас, z — да образува дясно ориентирана координатна система с останалите две оси.
- Условната линия замества оста y при определяне на положителния огъващ момент.



Фигура 6: Използване на криволинейна абсциса при равнинна рамка.

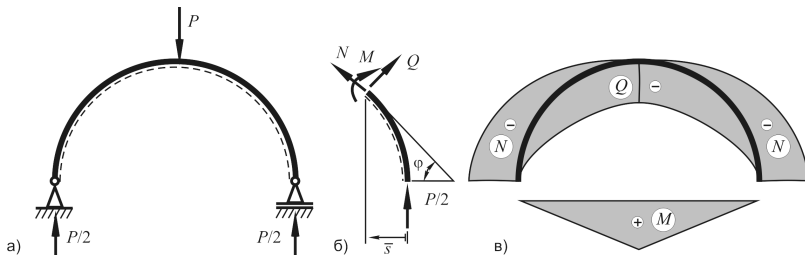
- Три условия за равновесие в равнината напълно определят трите неизвестни разрезни усилия.
- Обикаля се в една посока по кривите контури на рамката.
- За гредови елементи с една и съща ориентация условната линия е от една и съща страна и това е страната с положителната част на оста z .
- Поглеждайки срещу z мястото на разрязване, можем да определим коя част е лява и коя е дясна.
- За лява част винаги имаме криволинейна абсциса s и положителни разрезни усилия по посока на осите, а за дясна част имаме криволинейна абсциса \bar{s} и положителни разрезни усилия насочени в обратна посока на осите x , y и z .

§4. Арки и въжета

Арки

Арките са криволинейни пръти (пръти с криволинейна ос). За тях е характерно това, че поради кривината на оста им, всички товари се проектират по оста на пръта, като предизвикват опън-натиск, и напречно на пръта, като предизвикват огъване. Така арките съчетават тези две натоварвания и ако могат да трансферират по-опасното огъване в по-безопасният опън-натиск и особено натиск за крехките материали, то те стават много полезни. Тези свойства на арките са открити исторически много отдавна и са били широко използвани в сградостроенето и мостостроенето.

Двуставната арка, като показаната на фиг. 7, е една от най-простите статично определими арки. Такава арка не само е решима с условията на равновесие на статиката, но и не се отличава съществено от права гредна на две опори. На фиг. 7а е дадена кръгова арка, натоварена с централна сила P . Лесно се вижда, че опорните реакции са само вертикални сили равни на половината външно натоварване от условията за равновесие на цялата арка.



От условията за равновесие за част от арката, дадена на фиг. 7б, може да се определи огъващият момент M . Той се изразява чрез линейната абсциса \bar{s} като линейна функция

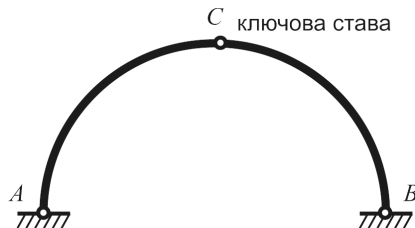
$$M = \frac{P}{2}\bar{s}$$

Проектирайки върху допирателната към мястото на разрязване и перпендикулярно на допирателната, могат да се определят и разрезните усилия N и Q :

$$N = -\frac{P}{2}\sin\varphi, \quad Q = -\frac{P}{2}\cos\varphi,$$

като функции на ъгъла φ , на който е наклонена допирателната и който се изменя от 90 до 0 градуса.

Огъващият момент е същият като при права греда, а той е определящ за якостта. Получава се обаче аксиално натоварване, което за дадения пример е натиск при опорите, който преминава в срязващо усилие с отдалечаване на опорите. Диаграмите на разрезните усилия са дадени на фиг. 7в.



Фигура 8: Триставна арка

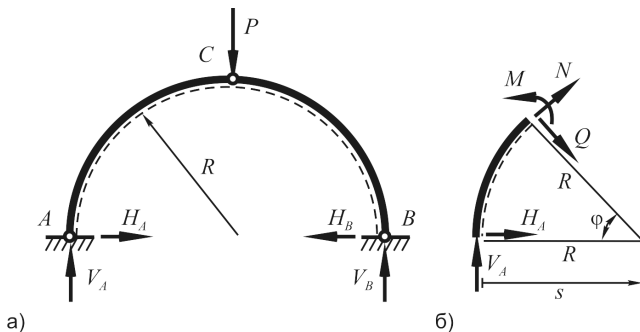
Триставната арка, дадена на фиг. 8, също е статично определима арка, която обаче е съставна.

Врязаната става C добавя една степен на свобода към закрепената чрез ставите A и B с една допълнителна връзка арка. Така арката е статично определима, т.е. тя има точно необходимия брой връзки за да е кинематично неизменяема. Ставата C се нарича ключова. При реализирането на такава арка чрез зидария, ключовата става се реализира с ключов камък.

Нека да определим опорните реакции и разрезните усилия при такава кръгова триставна арка, натоварена с една вертикална централна сила. Арката е дадена на фиг. 9а и е полукръг от окръжност с радиус R . От симетрията, а и от моментните условия за равновесие лесно можем да определим вертикалните опорни реакции:

$$\sum M_A = 0 \quad : \quad V_B = \frac{P}{2} \quad (3)$$

$$\sum M_B = 0 \quad : \quad V_A = \frac{P}{2} \quad (4)$$



Фигура 9: Триставна арка натоварена с централна вертикална сила.

Ако направим моментови условия за равновесие около точка C за всяка половина на арката, то получаваме

$$H_A R = V_A R \quad \text{и} \quad H_B R = V_B R$$

От тук следва, че и хоризонталните реакции са:

$$H_A = V_A = \frac{P}{2} \quad (5)$$

$$H_B = V_B = \frac{P}{2} \quad (6)$$

Да определим разрезните усилия за кръгова арка. Моментово условие за равновесие около мястото на разрязване на арката от фиг. 9б дава огъващият момент:

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{2}R(1 - \cos \varphi) - \frac{P}{2}R \sin \varphi = \\ &= \frac{P}{2}R(1 - \sin \varphi - \cos \varphi) \end{aligned} \quad (7)$$

От условия за равновесие на силите като ги проектираме по хоризонтала, а след това по вертикала се получават следните две уравнения:

$$N \cos \varphi - Q \sin \varphi = -\frac{P}{2} \quad (8)$$

$$N \sin \varphi + Q \cos \varphi = -\frac{P}{2} \quad (9)$$

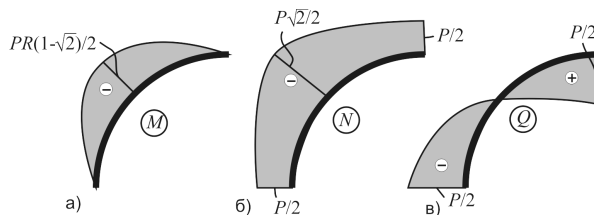
Тези уравнения можем да решим съвместно като умножим уравнение (8) по $\cos \varphi$, а уравнение (9) по $\sin \varphi$ и след събирането им се елиминира Q и можем да определим N :

$$N = -\frac{P}{2}(\sin \varphi + \cos \varphi) \quad (10)$$

По подобен начин можем да елиминираме разрезното усилие N като умножим уравнение (8) по $\sin \varphi$, а уравнение (9) по $\cos \varphi$ и след събирането получаваме Q :

$$Q = -\frac{P}{2}(\sin \varphi - \cos \varphi) \quad (11)$$

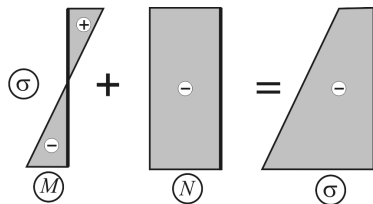
Диаграмите на разрезните усилия за диапазона на изменение на ъгъла $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ са дадени на фиг. 10.



Фигура 10: Диаграми на разрезните усилия в триставна арка под действие на централна напречна сила.

Основни изводи за разрезните усилия на триставна рамка:

- Арката е основно натоварена на натиск.
- В арката се получава огъващ момент, който е много по-малък в сравнение с правите греди при подобно натоварване.
- В опорите има стремеж за раздалечаването им.

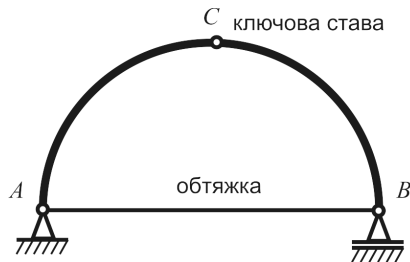


Фигура 11: Диаграми на нормалните напрежения при суперпонирането им от огъване и от натиск.

Огъващият момент се получава с максимална стойност в мястото на максимален натиск и лесно може да се направи така, че опъновите напрежения от огъване да се компенсират от натисковите нормални напрежения и да имаме само натискова зона в напречните сечения, както е показано на диаграмите на фиг. 11.

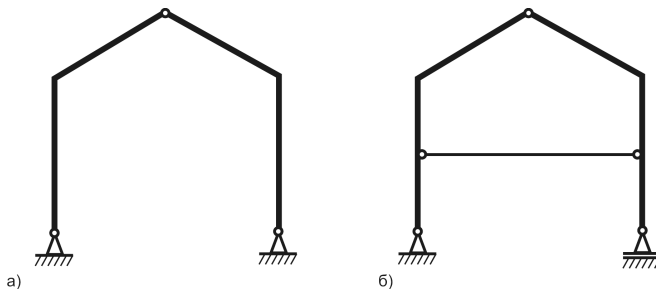
Това дава възможност арките да се използват широко в строителни конструкции, където се използват крехки материали, имащи ниска якост на опън. Даже когато имаме зидария тя е почти нулева.

Стремежа за раздалечаване на опорите може да създаде проблеми при някои видове конструкции, при които опорите не могат да се конструират така, че да поемат хоризонтални реакции. Тогава арковата конструкция може да се изгради с обтяжка като показаната на фиг. 12 триставна рамка с обтяжка, която е еквивалентна на триставната рамка с неподвижни опори.



Фигура 12: Триставна арка с обтяжка.

Статично определените арки могат да са с различни кривини - елиптични, параболични, и др., а не само кръгли. Те могат да са даже и с начупени прави оси, като показаните на фиг. 13.

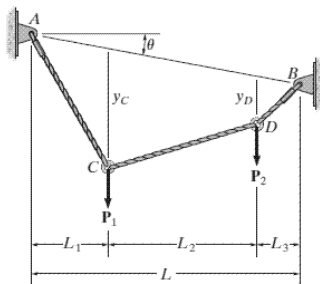


Фигура 13: Необли арки.

Въжета

Въже

Въжето е прът, който е много гъвкав — няма огъвна коравина, на натиск не може да носи товар и е абсолютно неразтегливо.



Фигура 14: Пример за окачена конструкция

Въжените конструкции са подложени на два вида натоварване: **съсредоточени сили равномерно разпределен товар**. Теглото на въжетата обикновено се пренебрегва и имаме първия случай, но на много големи разстояния са необходими големи по диаметър въжета със значително собствено тегло.

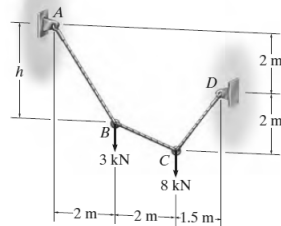
Да разгледаме какво става с въжена конструкция при действието само на съсредоточени сили.

4x2 условия за равн. на възли = 8 уравнения

4 реакции + 3 разрезни усилия = 7 неизвестни + 2 геометрични неизвестни – провисвания = 9 неизвестни.

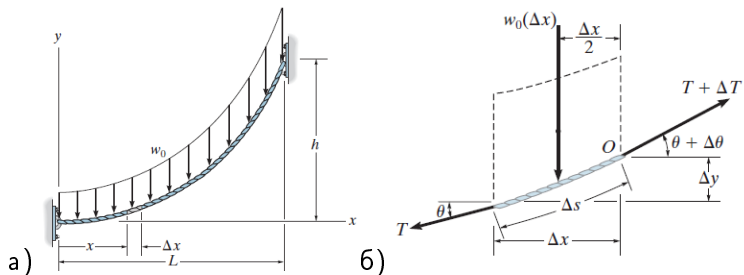
Трябва да знаем или едно от провисванията или общата дължина на въжето (допълнително геометрично

28 условие).



Фигура 15: Статично определяма конструкция

Въже под равномерно разпределен товар



Фигура 16: Въже под равномерно разпределен товар

$$\sum F_x = 0 : -T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$\sum F_y = 0 : -T \sin \theta - w_0(\Delta x) + (T + \Delta T) \sin(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$29 / 32 \quad \sum M_O = 0 : w_0(\Delta x)(\Delta x/2) - T \cos \theta \Delta y + T \sin \theta \Delta x = 0$$

Разделяме на Δx и разглеждаме границите при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta \theta \rightarrow 0$ и $\Delta T \rightarrow 0$:

$$\frac{d(T \cos \theta)}{dx} = 0 ; \quad \frac{d(T \sin \theta)}{dx} = w_0 ; \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta .$$

След интегриране се получава:

$$T \cos \theta = F_H = \text{const} ; \quad T \sin \theta = w_0 x ; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0 x}{F_H}$$

При повторно интегриране на последното уравнение с начални условия $x = 0$, $y = 0$, получаваме уравнение

$$y = \frac{w_0}{2F_H} x^2$$

което е уравнение на квадратна парабола.

При $x = L$, $y = h$ се получава за хоризонталната реакция

$$F_H = \frac{w_0 L^2}{2h}$$

което ако заместим в уравнението на параболата получаваме

$$y = \frac{h}{L^2} x^2$$

Максималната стойност за ъгъла θ_{\max} е при $x = L$, където се получава и най-голямото разрезно усилие:

$$T_{\max} = \sqrt{F_H^2 + (w_0 L)^2} = w_0 L \sqrt{1 + (L/2h)^2}$$

Съдържание I

- 1 §1. Ферми
- 2 §2. Герберови греди
- 3 §3. Рамки
- 4 §4. Арки и въжета